

Рубежный контроль
дополнительной общеразвивающей образовательной программы
по направлению «Наука» «Математика.2024» 10 класс

1. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.
2. Длины сторон многоугольника равны a_1, a_2, \dots, a_n . Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \dots + a_n)$. Докажите, что если A – сумма длин нескольких сторон многоугольника, B – сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$.
3. Функция $f(x)$ определена и удовлетворяет соотношению

$$(x - 1)f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) - f(x) = x$$

при всех $x \neq 1$. Найдите все такие функции.

4. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

5. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AM и AN делить угол BAD на три равные части?
6. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b \cos x$. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней.